



Citation for published version:

Bellieud, M & Cooper, S 2016, 'Analyse asymptotique de milieux élastiques stratifiés dans les espaces de fonctions à déformation bornée', *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 354, no. 4, pp. 437-442.
<https://doi.org/10.1016/j.crma.2016.01.004>

DOI:

[10.1016/j.crma.2016.01.004](https://doi.org/10.1016/j.crma.2016.01.004)

Publication date:

2016

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication](#)

Publisher Rights

CC BY-NC-ND

University of Bath

Alternative formats

If you require this document in an alternative format, please contact:
openaccess@bath.ac.uk

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Problèmes mathématiques de la mécanique

Analyse asymptotique de milieux élastiques stratifiés dans les espaces de fonctions à déformation bornée



Asymptotic analysis of stratified elastic media in the space of functions with bounded deformation

Michel Bellieud^a, Shane Cooper^b

^a Université Montpellier-2, Case courrier 048, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

^b Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath, BA2 7AY, UK

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 17 août 2015

Accepté après révision le 7 janvier 2016

Disponible sur Internet le 11 février 2016

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Nous analysons le comportement asymptotique des solutions de problèmes du type

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : \begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega = (0, L) \times \Omega', \\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon(x_1) \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_\varepsilon))\mathbf{I} + 2\mu_\varepsilon(x_1)\mathbf{e}(\mathbf{u}_\varepsilon), \\ \mathbf{e}(\mathbf{u}_\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + \nabla^T\mathbf{u}_\varepsilon), \\ \mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{f} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (1)$$

lorsque les coefficients de Lamé dépendent uniquement de la variable x_1 , sont bornés dans $L^1(\Omega)$ et que $\frac{1}{\mu_\varepsilon}$ est borné dans $L^1(\Omega)$. Nous déterminons le problème limite sous les hypothèses :

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{*} m, \quad \frac{1}{\mu_\varepsilon} \xrightarrow{*} \nu \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } \mathcal{M}([0, L]), \quad \lambda_\varepsilon = l\mu_\varepsilon \quad (l \geq 0), \quad (2)$$

$$m(\{t\})\nu(\{t\}) = 0 \quad \forall t \in [0, L], \quad m(\{0\}) = m(\{L\}) = \nu(\{0\}) = \nu(\{L\}) = 0.$$

Notre travail s'applique aussi à l'équation de la chaleur, étendant au cas anisotrope les résultats obtenus par G. Bouchitté et C. Picard (Appl. Anal. 61 (1996) 307–341).

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ABSTRACT

We analyse the asymptotic behaviour of solutions to problems of the type (1) in the case where the Lamé coefficients only depend on the variable x_1 , are bounded in $L^1(0, L)$, and $\frac{1}{\mu_\varepsilon}$ is bounded in $L^1(0, L)$. We determine the limit problem under the assumptions (2). Our

Adresses e-mail : michel.bellieud@univ-montp2.fr (M. Bellieud), S.A.L.Cooper@bath.ac.uk (S. Cooper).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.01.004>

1631-073X/© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

method applies as well to the heat equation, extending to the general anisotropic setting the results of G. Bouchitté and C. Picard (Appl. Anal. 61 (1996) 307–341).

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Abridged English version

Let $\Omega := (0, L) \times \Omega'$ be a bounded cylindrical domain of \mathbb{R}^3 . We are interested in the asymptotic analysis of the behaviour of the solution \mathbf{u}_ε to the elasticity problem (1) when the Lamé coefficients $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$ only depend on one variable (x_1), are bounded in $L^1(0, L)$, and satisfy the weak* convergences in the sense of the measures stated in (2). Our analysis does not cover the case of independent Lamé coefficients. G. Bouchitté and C. Picard have established in [2], under the assumption (2), the weak* convergence in the space $BV(\Omega)$ (functions with bounded variations on Ω) of the solution in $H_0^1(\Omega)$ to the equation $-\text{div} \mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f$ to the solution to (the main result of [2] concerns a more general nonlinear convex problem with mixed boundary conditions)

$$\min_{BV_0^{v,m}(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |D_{v \otimes \mathcal{L}^2} D_{x_1} u|^2 \, dv \otimes \mathcal{L}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=2}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right|^2 \, dm \otimes \mathcal{L}^2 - \int_{\Omega} f u \, dx,$$

$$BV_0^{v,m}(\Omega) := \left\{ \varphi \in BV(\Omega) \left| \begin{array}{l} D\varphi \ll v \otimes \mathcal{L}^2, \mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} D\varphi \in L_{v \otimes \mathcal{L}^2}^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \\ \varphi^* \in L_m^2(0, L; H_0^1(\Omega')), \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{array} \right. \right\}, \tag{3}$$

where φ^* is the precise representative of φ (equal at x to the limit of the averaged value of φ on balls centred at x , whose radius tends to 0 if this limit exists, to 0 otherwise, see [3, p. 46]) and $\mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} D\varphi$ denotes the Radon–Nikodym derivative of the vector measure $D\varphi$ (gradient of φ in the sense of distributions) with respect to $v \otimes \mathcal{L}^2$. We extend their result to the case of elasticity by appropriately developing their analysis in the setting of functions with bounded deformation. We prove that the limit problem associated with (1) is

$$(\mathcal{P}^{\text{eff}}) := \min_{\mathbf{u} \in BD_0^{v,m}(\Omega)} \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \tag{4}$$

The space $BD_0^{v,m}(\Omega)$ is defined by

$$BD_0^{v,m}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in BD(\Omega) \left| \begin{array}{l} \mathbf{E}\boldsymbol{\varphi} \ll v \otimes \mathcal{L}^2, \mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\boldsymbol{\varphi} \in L_{v \otimes \mathcal{L}^2}^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \\ \varphi_\alpha^* \in L_m^2(0, L; H_0^1(\Omega')) \quad \alpha \in \{2, 3\}, \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{array} \right. \right\}, \tag{5}$$

where $BD(\Omega)$ is the space of functions with bounded deformation (set of the elements $\boldsymbol{\varphi}$ of $L^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ whose symmetrized gradient in the sense of distributions $\mathbf{E}\boldsymbol{\varphi}$ is a vector measure, see [5]). We show that the mapping defined on $BD_0^{v,m}(\Omega)$ by

$$\|\mathbf{v}\|_{BD_0^{v,m}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |D_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\mathbf{v}|^2 \, dv \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |\mathbf{e}_{x'}(\mathbf{v}^*)|^2 \, dm \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

where $\mathbf{e}_{x'}(\mathbf{v}) := \sum_{\alpha,\beta=2}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$, is a norm which turns $BD_0^{v,m}(\Omega)$ into a Hilbert space. Setting $\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{v}) = D_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\mathbf{v}$, the mapping $a(\cdot, \cdot)$ is the continuous symmetric bilinear form on $BD_0^{v,m}(\Omega)$ given by

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{1}{l+2} \left| \text{tr}(\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{v})) + 2\boldsymbol{\Xi}_{11}(\mathbf{v}) \right|^2 \, dv \otimes \mathcal{L}^2 + 4 \sum_{\alpha=2}^3 \int_{\Omega} |\boldsymbol{\Xi}_{1\alpha}(\mathbf{v})|^2 \, dv \otimes \mathcal{L}^2$$

$$+ 4 \int_{\Omega} |\mathbf{e}_{23}(\mathbf{v}^*)|^2 + \frac{4(l+1)}{l+2} \left(|\mathbf{e}_{22}(\mathbf{v}^*)|^2 + |\mathbf{e}_{33}(\mathbf{v}^*)|^2 + \frac{l}{l+1} \mathbf{e}_{22}(\mathbf{v}^*) \mathbf{e}_{33}(\mathbf{v}^*) \right) \, dm \otimes \mathcal{L}^2.$$

We prove that a is coercive on $BD_0^{v,m}(\Omega)$.

Theorem 0.1. *The space $BD_0^{v,m}(\Omega)$ endowed with the norm (6) is a Hilbert space. The bilinear form a is continuous and coercive on $BD_0^{v,m}(\Omega)$. Under the assumption (2), the solution \mathbf{u}_ε to (1) weakly* converges in $BD(\Omega)$ to the unique solution \mathbf{u} of (4).*

Case of the anisotropic heat equation. Our method applies to the study of anisotropic linear scalar diffusion problems of the type (8), where \mathbf{A} is a symmetric positive definite 3×3 matrix satisfying $A_{11} \neq 0$. The limit problem takes the form (9) where $BV_0^{v,m}(\Omega)$ is the Hilbert space defined by (3), (10), with $\nabla_{x'} v := \left(0, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^T$. Setting $\boldsymbol{\xi}(\varphi) := \mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{D} \varphi$, the map $a(\cdot, \cdot)$ is the coercive continuous bilinear form on $BV_0^{v,m}(\Omega)$ given by (11).

Theorem 0.2. *Under the assumption (2), the sequence of solutions to (8) weakly* converges in $BV(\Omega)$ to the unique solution of the problem (9).*

1. Introduction et énoncé du résultat

Soit $\Omega := (0, L) \times \Omega'$ un domaine borné cylindrique de \mathbb{R}^3 . Nous nous intéressons à l'analyse asymptotique du problème d'élasticité (1) lorsque les coefficients de Lamé $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$ dépendent d'une seule variable (x_1), sont bornés dans $L^1(0, L)$, et satisfont les convergences étoile faible au sens des mesures (2). Notre analyse ne couvre pas le cas de coefficients de Lamé indépendants. G. Bouchitté and C. Picard ont établi dans [2], sous l'hypothèse (2), la convergence faible étoile dans l'espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée sur Ω , de la solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème $-\operatorname{div} \mu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon = f$ vers la solution du problème (3) (le résultat principal de [2] concerne un problème plus général, convexe non linéaire, avec des conditions aux limites mixtes), où φ^* désigne le représentant précis de φ (égal en x à la limite de moyennes de φ sur des boules centrées en x dont le rayon tend vers 0 si cette limite existe, à 0 sinon, voir [3, p. 46]), et $\mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{D} \varphi$ désigne la dérivée de Radon–Nikodym de la mesure vectorielle $\mathbf{D} \varphi$ (gradient de φ au sens des distributions) par rapport à $v \otimes \mathcal{L}^2$. Nous étendons ce résultat au cas de l'élasticité non linéaire en développant leur analyse dans le cadre des fonctions à déformation bornée. Nous montrons que le problème effectif associé à (1) s'écrit

$$(\mathcal{P}^{\text{eff}}) := \min_{\mathbf{u} \in BD_0^{v,m}(\Omega)} \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \tag{7}$$

L'espace $BD_0^{v,m}(\Omega)$ est défini par (5), où $BD(\Omega)$ est l'espace des fonctions à déformation bornée (éléments $\boldsymbol{\varphi}$ de $L^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$) dont le gradient symétrisé au sens des distributions $\mathbf{E} \boldsymbol{\varphi}$ est une mesure vectorielle, voir [5]). Nous prouvons que la norme définie sur $BD_0^{v,m}(\Omega)$ par (6) où $\mathbf{e}_{x'}(\mathbf{v}) := \sum_{\alpha, \beta=2}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$, confère à $BD_0^{v,m}(\Omega)$ une structure d'espace de Hilbert. Posant $\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E} \mathbf{v}$, la forme $a(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire symétrique continue sur $BD_0^{v,m}(\Omega)$ donnée par

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{1}{l+2} \left| \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{v})) + 2 \boldsymbol{\Xi}_{11}(\mathbf{v}) \right|^2 dv \otimes \mathcal{L}^2 + 4 \sum_{\alpha=2}^3 \int_{\Omega} |\boldsymbol{\Xi}_{1\alpha}(\mathbf{v})|^2 dv \otimes \mathcal{L}^2 + 4 \int_{\Omega} |e_{23}(\mathbf{v}^*)|^2 + \frac{4(l+1)}{l+2} \left(|e_{22}(\mathbf{v}^*)|^2 + |e_{33}(\mathbf{v}^*)|^2 + \frac{l}{l+1} e_{22}(\mathbf{v}^*) e_{33}(\mathbf{v}^*) \right) dm \otimes \mathcal{L}^2.$$

Nous montrons que a est coercive sur $BD_0^{v,m}(\Omega)$.

Théorème 1.1. *L'espace $BD_0^{v,m}(\Omega)$ défini par (5), muni de la norme (6) est un espace de Hilbert. La forme bilinéaire a est continue et coercive sur $BD_0^{v,m}(\Omega)$. Sous l'hypothèse (2), la suite (\mathbf{u}_ε) des solutions de (1) converge étoile faiblement dans $BD(\Omega)$ vers l'unique solution \mathbf{u} du problème (7).*

Exemple. Supposons que μ_ε soit donnée par

$$\mu_\varepsilon = \mu \mathbb{1}_{(0,L) \setminus \left(\frac{l}{2} - \varepsilon, \frac{l}{2} + \varepsilon\right)} + 2\varepsilon \mathbb{1}_{\left(\frac{l}{2} - \varepsilon, \frac{l}{2} + \varepsilon\right)}.$$

On obtient alors $v = \frac{1}{\mu} \mathcal{L}^1 + \delta_{\frac{l}{2}}$, $m = \mu \mathcal{L}^1$, et, posant $\Sigma := \{L/2\} \times \Omega'$, $\Omega^- := (0, L/2) \times \Omega'$, $\Omega^+ := (L/2, L) \times \Omega'$, on trouve $BD_0^{v,m}(\Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega \setminus \Sigma), \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$. De plus, $\mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E} \mathbf{u} = \mathbf{e}(\mathbf{u}) \mathbb{1}_{\Omega \setminus \Sigma} + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \odot \mathbf{e}_1 \mathcal{H}_{\Sigma}^2$, où \mathbf{u}^- (resp. \mathbf{u}^+) désigne la trace de \mathbf{u} à gauche (resp. droite) de Σ et $\mathbf{a} \odot \mathbf{b} := 1/2(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$. Notant $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) := \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u})$, la forme a s'écrit :

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega \setminus \Sigma} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi}) dx + \int_{\Sigma} (l+2)(u_1^+ - u_1^-)(\varphi_1^+ - \varphi_1^-) + \sum_{\alpha=2}^3 (u_\alpha^+ - u_\alpha^-)(\varphi_\alpha^+ - \varphi_\alpha^-) d\mathcal{H}^2.$$

Le problème (7) est alors équivalent à

$$(\mathcal{P}^{\text{eff}}) : \begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \setminus \Sigma, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega \setminus \Sigma; \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ (l+2)(u_1^+ - u_1^-) = \sigma_{11}(\mathbf{u}|_{\Omega^-}) = \sigma_{11}(\mathbf{u}|_{\Omega^+}) & \text{sur } \Sigma, \\ u_\alpha^+ - u_\alpha^- = \sigma_{1\alpha}(\mathbf{u}|_{\Omega^-}) = \sigma_{1\alpha}(\mathbf{u}|_{\Omega^+}) & \text{sur } \Sigma \text{ pour } \alpha \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Cas de l'équation de la chaleur anisotrope. Nos résultats s'étendent à l'étude de problèmes du type

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : -\operatorname{div}(\mu_\varepsilon \mathbf{A} \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad f \in L^\infty(\Omega), \tag{8}$$

lorsque \mathbf{A} est une matrice symétrique définie positive vérifiant $A_{11} \neq 0$. Le problème limite s'écrit

$$(\mathcal{P}^{\text{eff}}) := \min_{u \in BV_0^{v,m}(\Omega)} \frac{1}{2} a(u, u) - \int_\Omega f u, \tag{9}$$

où $BV_0^{v,m}(\Omega)$ est l'espace de Hilbert défini par (3) associé à la norme

$$\|v\|_{BV_0^{v,m}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{D}v|^2 \, dv \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla_{x'}(v^*)|^2 \, dm \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

où $\nabla_{x'} v := \left(0, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^T$. Posant $\xi(\varphi) := \mathbf{D}_{v \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{D}\varphi$, l'application $a(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire continue et coercive sur $BV_0^{v,m}(\Omega)$ donnée par

$$a(v, w) := \int_\Omega A_{11}^{-1}(\mathbf{A}\xi(v))_1 (\mathbf{A}\xi(w))_1 \, dv \otimes \mathcal{L}^2 - \int_\Omega A_{11}^{-1}(\mathbf{A}\nabla_{x'} v^*)_1 (\mathbf{A}\nabla_{x'} w^*)_1 + \mathbf{A}\nabla_{x'} v^* \cdot \nabla_{x'} w^* \, dm \otimes \mathcal{L}^2. \tag{11}$$

Théorème 1.2. *Sous l'hypothèse (2), la suite (u_ε) des solutions de (8) converge étoile-faiblement dans $BV(\Omega)$ vers l'unique solution u du problème (9).*

2. Résumé de la preuve

La démonstration repose sur la construction d'une suite (φ_ε) de champs tests. Elle est déduite d'une famille de suite $((\varphi_\varepsilon^k)_\varepsilon)_{k \in \mathbb{N}}$ définies à partir de sous-ensembles finis A_k de $[0, L]$ satisfaisant

$$\begin{cases} A_k = \{t_0^k, t_1^k, \dots, t_{n_k}^k\}, \quad A_k \subset A_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ 0 = t_0^k < t_1^k < t_2^k < \dots < t_{n_k-1}^k < t_{n_k}^k = L, \\ v\left(\{t_j^k\}\right) = m\left(\{t_j^k\}\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \{0, \dots, n_k\}, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{j \in \{1, \dots, n_k\}} |t_j^k - t_{j-1}^k| = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Posant $I_j^k := (t_{j-1}^k, t_j^k]$, notant j_{x_1} l'entier tel que $x_1 \in I_{j_{x_1}}^k$, on définit $\phi_\varepsilon^k(x_1) := \frac{v_\varepsilon((t_{j_{x_1}-1}^k, x_1))}{v_\varepsilon(I_{j_{x_1}}^k)}$. On fixe $\mathbf{v} \in BD_0^{v,m}(\Omega)$ arbitraire (prolongé à \mathbb{R}^3 par 0), $\delta > 0$ et on introduit sa régularisée partielle

$$\mathbf{v}^\delta(x) := \mathbf{v}(x_1, \cdot) \star \rho_\delta,$$

où (ρ_δ) est une suite régularisante dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Pour alléger les notations, on pose $\varphi := \mathbf{v}^\delta$. Le champ test est l'élément de $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ donné en fonction de φ par

$$\begin{aligned} \varphi_{\varepsilon 1}^k(x) &:= \frac{1}{l+2} \left(\int_{I_{j_{x_1}}^k} \operatorname{ltr}(\Xi(\varphi))(s_1, x') + 2\Xi_{11}(\varphi)(s_1, x') \, dv(s_1) \right) \phi_\varepsilon^k(x_1) \\ &\quad - \frac{l}{l+2} \sum_{\alpha=2}^3 \int_{t_{j_{x_1}-1}^k}^{x_1} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha}(s_1, x') \, ds_1 + \varphi_1^+(t_{j_{x_1}-1}^k, x'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\varepsilon\alpha}^k(x) := & \left(\int_{I_{x_1}^k} 2\Xi_{1\alpha}(\boldsymbol{\varphi})(s_1, x') \, d\nu(s_1) \right) \phi_\varepsilon^k(x_1) \\ & - \int_{t_{j_{x_1}^k-1}^k}^{x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\alpha}(s_1, x') \, ds_1 + \varphi_\alpha^+(t_{j_{x_1}^k-1}^k, x'), \quad \forall \alpha \in \{2, 3\}, \end{aligned} \tag{13}$$

où $\boldsymbol{\varphi}^+(x_1, x')$ désigne la trace de $\boldsymbol{\varphi}$ à droite de $\{x_1\} \times \Omega'$. Étant donnée une suite de mesures (θ_ε) convergeant *faiblement vers θ , on dit qu'une suite de fonction f_ε converge faiblement vers f suivant le couple $(\theta_\varepsilon, \theta)$ (notation $f_\varepsilon \xrightarrow{\theta_\varepsilon, \theta} f$) si $f \in L^2_\theta$, $\sup_\varepsilon \int |f_\varepsilon|^2 d\theta_\varepsilon < +\infty$, et $f_\varepsilon \theta_\varepsilon$ converge *faiblement vers $f\theta$. Elle converge fortement (notation $f_\varepsilon \xrightarrow{\theta_\varepsilon, \theta} f$) si de plus $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |f_\varepsilon|^2 d\theta_\varepsilon = \int |f|^2 d\theta$. On sait (voir [1,4,6]) que toute suite (f_ε) vérifiant $\sup_\varepsilon \int |f_\varepsilon|^2 d\theta_\varepsilon$ admet une sous-suite convergeant faiblement suivant le couple $(\theta_\varepsilon, \theta)$, et que si f_ε (resp. g_ε) converge faiblement (resp. fortement) vers f (resp. g) suivant $(\theta_\varepsilon, \theta)$, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon g_\varepsilon d\theta_\varepsilon = \int f g d\theta$. Par un argument de diagonalisation, on montre l'existence d'une suite $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon (= \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^k)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}| \, dx &= 0, \\ \sigma_{\varepsilon 11}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) &\xrightarrow{v_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, v \otimes \mathcal{L}^2} (\text{ltr}(\Xi(\boldsymbol{\varphi})) + 2\Xi_{11}(\boldsymbol{\varphi})), \\ \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) &\xrightarrow{v_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, v \otimes \mathcal{L}^2} 2\Xi_{1\alpha}(\boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \alpha \in \{2, 3\}, \\ \mathbf{e}_{x'}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) &\xrightarrow{m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, m \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{e}_{x'}(\boldsymbol{\varphi}^*). \end{aligned} \tag{14}$$

On prouve que la suite (\mathbf{u}_ε) des solutions de (1) est bornée dans $BD(\Omega)$ et satisfait

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_\Omega |\mathbf{u}'_\varepsilon|^2 dm_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2 + \int_\Omega |\mathbf{u}_\varepsilon| \, dx + \int_\Omega \mu_\varepsilon |\mathbf{e}(\mathbf{u}_\varepsilon)|^2 \, dx < \infty.$$

On déduit, à une suite extraite près, les convergences suivantes pour un certain champ $\mathbf{u} \in BD_0^{v,m}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}| \, dx &= 0, \quad \sigma_{\varepsilon 11}(\mathbf{u}_\varepsilon) \xrightarrow{v_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, v \otimes \mathcal{L}^2} \text{ltr}(\Xi(\mathbf{u})) + 2\Xi_{11}(\mathbf{u}), \\ \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\mathbf{u}_\varepsilon) &\xrightarrow{v_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, v \otimes \mathcal{L}^2} 2\Xi_{1\alpha}(\mathbf{u}) \quad \forall \alpha \in \{2, 3\}, \quad \mathbf{e}_{x'}(\mathbf{u}_\varepsilon) \xrightarrow{m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, m \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{e}_{x'}(\mathbf{u}^*). \end{aligned} \tag{15}$$

On multiplie (1) par $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ et on intègre par parties. Après une manipulation élémentaire des termes, il vient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \, dx &= \int_\Omega \left(\frac{1}{l+2} \sigma_{\varepsilon 11}(\mathbf{u}_\varepsilon) \sigma_{\varepsilon 11}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) + \sum_{\alpha=2}^3 \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\mathbf{u}_\varepsilon) \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) \right) d\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2 \\ &+ \int_\Omega \frac{4(l+1)}{l+2} \sum_{\alpha=2}^3 e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) + 4e_{23}(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{23}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) + \frac{2l}{l+1} \left(e_{22}(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{33}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) + e_{33}(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{22}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) \right) dm_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2. \end{aligned} \tag{16}$$

En passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, compte tenu de (14) et (15), on obtient :

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx.$$

Comme $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}^\delta$ converge fortement vers \mathbf{v} dans $BD^{v,m}(\Omega)$ (espace déduit de $BD_0^{v,m}(\Omega)$ en supprimant les conditions aux limites sur $\partial\Omega$) quand $\delta \rightarrow 0$, on déduit que \mathbf{u} satisfait le problème variationnel

$$(\mathcal{P}^{eff}) : \begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in BD_0^{v,m}(\Omega), \\ \mathbf{u} \in BD_0^{v,m}(\Omega), \end{cases}$$

équivalent à (7). On établit enfin la complétude de $BD_0^{v,m}(\Omega)$ et la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ sur $BD_0^{v,m}(\Omega)$, ce qui achève la preuve du théorème.

Remerciements

Les travaux de S.C. et M.B. ont été financés par l'Agence nationale de la recherche (ANR) (Projet « Blanc », ANR-13-BS03-0009-03). Ceux de S.C. ont été aussi supportés par l'«Engineering and Physical Sciences Research Council» (grant EP/M017281/1).

Références

- [1] G. Bouchitté, Représentation intégrale de fonctionnelles convexes sur un espace de mesures, *Ann. Univ. Ferrara, Sez. 7 : Sci. Mat.* 33 (1987) 113–156.
- [2] G. Bouchitté, C. Picard, Singular perturbations and homogenization in stratified media, *Appl. Anal.* 61 (1996) 307–341.
- [3] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.
- [4] J.E. Hutchinson, Second fundamental form for varifolds and the existence of surfaces minimising curvature, *Indiana Univ. Math. J.* 35 (1) (1986) 45–71.
- [5] R. Temam, *Problèmes mathématiques en plasticité*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [6] V.V. Zhikov, On weighted Sobolev spaces, *Mat. Sb.* 189 (8) (1998) 27–58 (in Russian); translation in *Sb. Math.* 189 (7–8) (1998) 1139–1170.